

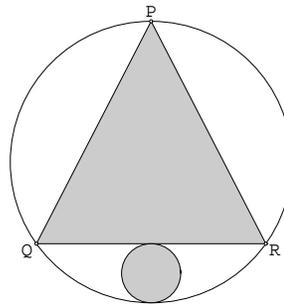
VI Certamen de Matemáticas Al-Bayat

Segundo Ciclo

24 de Abril de 2004

Problema 1.

En una circunferencia de radio 9 cm inscribimos un triángulo isósceles PQR en el que $PQ = PR$. Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base QR del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura. Si la longitud de PQ es 16 cm, ¿cuánto vale el radio de la circunferencia pequeña?



Problema 2.

Al salir de compras, llevaba en el portamonedas unos 15€ en monedas de un euro y 20 céntimos.

Al regresar, traía tantos euros como monedas de 20 céntimos tenía al comienzo, y tantas monedas de 20 céntimos como monedas de euro tenía antes.

En el portamonedas me quedaba un tercio del dinero que llevaba al salir de compras.

¿Cuánto me costaron las compras?

Problema 3.

Indica los cuatro números siguientes de cada serie. Justifica la respuestas:

1. 1, 7, 8, 5, 3, 8, ...
2. 11, 31, 71, 91, 32, 92, ...

Problema 4.

En una habitación hay tres hombres. En la habitación de al lado, que está a oscuras, hay 5 sombreros, 3 blancos y 2 negros. Los tres hombres entran en la habitación oscura y cada uno se pone un sombrero sin saber su color. Cuando salen, cada uno ve el color del sombrero de los otros pero no el propio, salvo uno de los hombres, que es ciego.

El primer hombre dice: “Yo no puedo saber de qué color es mi sombrero”.

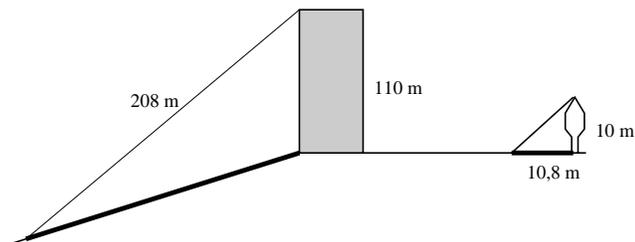
El segundo hombre dice: “Yo tampoco puedo saber de qué color es mi sombrero”.

El tercer hombre, que es el ciego, dice: “Yo si sé de qué color es el mío”.

¿De qué color es el sombrero del ciego?

Problema 5.

La figura siguiente muestra una torre de 110 m de altura proyectando una sombra sobre una ladera de inclinación desconocida. La visual desde el final de la sombra hasta la parte más alta de la torre mide 208 m. En ese momento, un árbol de 10 m de altura produce una sombra de 10,8 m sobre la superficie horizontal. ¿Qué longitud tiene la sombra de la torre?



Problema 6.

Alex piensa en tres números. Al sumarlos de dos en dos obtiene 38, 44 y 52. ¿Cuáles son los tres números?

Soluciones del VI Certamen de Matemáticas Al-Bayat

PRIMER CICLO

1. Si ha formado, respectivamente, cuadrados con lados de x e y cubos y n es el número total de de cubos, tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = n + 7 \\ y^2 = n - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = 17 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 17 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

De aquí obtenemos fácilmente que $x = 9$, $y = 8$ y $n = 74$ cubos.

2. Es obligatorio que en la primera y segunda fila (horizontal) haya 21 botellas, por lo que es necesario dejar en la cava al menos 42 botellas. Dejando vacías las posiciones intermedias y cuidando de que las esquinas opuestas sumen 21 conseguimos robar el máximo de $60 - 42 = 18$ botellas.

11	0	10
0		0
10	0	11

3. El triángulo parece ser rectángulo. Lo comprobamos con el teorema de Pitágoras: los dos catetos miden $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ y la hipotenusa mide $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Como $\sqrt{10}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2$, el triángulo es rectángulo. Entonces el área es $\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{5} = \frac{5}{2}$.

4. El número es 6107016, ya que $6 = 1 + 2 + 3$ es el único número perfecto entre 1 y 9, 0 y 1 son los únicos números que coinciden con su cuadrado, y 0 es el único número igual a su mitad.

5. Los tres socios tendrán que instalar 3 cerraduras (por ejemplo A , B y C) y dar a cada socio dos llaves (por ejemplo AB , BC y CA).

6. Llamando x al número de señoras, planteamos la ecuación

$$5x = 24 + (24 - x),$$

que resolviendo da $6x = 48 \Rightarrow x = 8$ señoras.

SEGUNDO CICLO

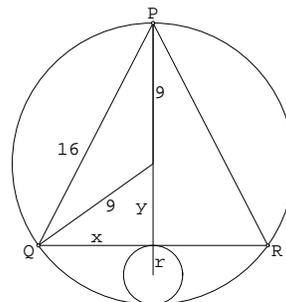
1. Llamamos r al radio buscado y x e y como en la figura. Entonces, usando el teorema de Pitágoras podemos formar el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ x^2 + (y + 9)^2 = 256 \end{cases} \Rightarrow (y + 9)^2 - y^2 = 175$$

$$\Rightarrow 18y + 81 = 175 \Rightarrow 18y = 94 \Rightarrow y = \frac{94}{18} = \frac{47}{9}.$$

Entonces,

$$r = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - \frac{47}{9}}{2} = \frac{81 - 47}{18} = \frac{34}{18} = \frac{17}{9}.$$



2. Llamando x e y , respectivamente, al número de monedas de euro y número de monedas de 20 céntimos, el problema se plantea:

$$\begin{cases} x + 0,20y \simeq 15 \\ y + 0,20x = \frac{1}{3}(x + 0,20y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 0,60x = x + 0,20y \Rightarrow 2,80y = 0,40x \\ \Rightarrow x = 7y \Rightarrow 7,20y \simeq 15 \Rightarrow y = 2, x = 14. \end{cases}$$

3. En la primera serie, cada número es la cifra de las unidades de la suma de los dos anteriores. Los siguientes números son: 1, 9, 0, 9, ... En la segunda serie tenemos los números primos de dos cifras, pero escritos con las cifras invertidas. Los siguientes números son 13, 73, 14, 34, ...

4. El ciego sabía que su sombrero tenía que ser blanco. A continuación se consideran las posibilidades de que fuera negro y la razón por la que no pueden darse:

BNN: El primero no hubiera dudado de que su sombrero es blanco, ya que ve dos negros.

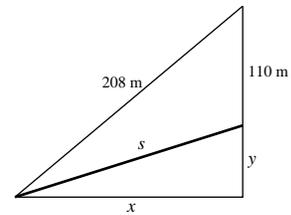
NBN: De forma parecida, segundo no hubiera dudado de que su sombrero es blanco, ya que ve dos negros.

BBN: El segundo, al ver un sombrero negro sobre el ciego hubiera sabido que el suyo es blanco, porque en otro caso, el primero habría visto dos sombreros negros y no hubiera dudado sobre el suyo.

5. La hipotenusa del triángulo rectángulo formado por el árbol y su sombra es $\sqrt{10^2 + 10,8^2} = 14,7187$ m.

Llamamos s a la longitud de la sombra pedida y x e y como en la figura.

Usando triángulos semejantes, $\frac{208}{110+y} = \frac{14,7187}{10}$, de donde $y = 31,3168$. Entonces, como $s^2 = x^2 + y^2$ y $208^2 = x^2 + (y + 110)^2$, resulta que $s^2 = 208^2 - (y + 110)^2 + y^2 = 24274,3$ y $s = 155,802$ m.



6. Si x, y, z son los tres números buscados, entonces $x + y = 38, y + z = 44, z + x = 52$. Sumando las tres ecuaciones, $2x + 2y + 2z = 38 + 44 + 52 = 134 \Rightarrow x + y + z = 67 \Rightarrow x = 67 - 44 = 23, y = 67 - 52 = 15, z = 67 - 38 = 29$.