Soluciones del VI Certamen de Matemáticas Al-Bayat

Primer Ciclo

1. Si ha formado, respectivamente, cuadrados con lados de x e y cubos y n es el número total de de cubos, tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = n+7 \\ y^2 = n-10 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = 17 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 17 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y = 17 \\ x-y = 1 \end{array}\right. .$$

De aquí obtenemos fácilmente que $x = 9$, $y = 8$ y $n = 74$ cubos.

2. Es obligatorio que en la primera y segunda fila (horizontal) haya 21 botellas, por lo que es necesario dejar en la cava al menos 42 botellas. Dejando vacías las posiciones intermedias y cuidando de que las esquinas opuestas sumen 21 conseguimos robar el máximo de $60 - 42 = 18$ botellas.

11	0	10
0		0
10	0	11

3. El triángulo parece ser rectángulo. Lo comprobamos con el teorema de Pitágoras: los dos catetos miden $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ y la hipotenusa mide $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{10}$. Como $\sqrt{10}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2$, el triángulo es rectángulo. Entonces el área es $\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{5} = \frac{5}{2}$.

4. El número es 6107016, ya que $6 = 1+2+3$ es el único número perfecto entre 1 y 9, 0 y 1 son los únicos números que coinciden con su cuadrado, y 0 es el único número igual a su mitad.

5. Los tres socios tendrán que instalar 3 cerraduras (por ejemplo A, B y C) y dar a cada socio dos llaves (por ejemplo AB, BC y CA).

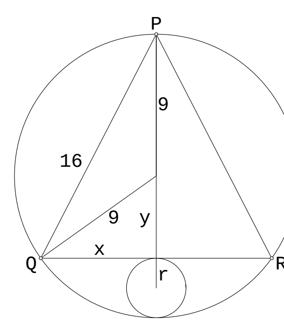
6. Llamando x al número de señoras, planteamos la ecuación

$$5x = 24 + (24 - x),$$

que resolviendo da $6x = 48 \Rightarrow x = 8$ señoras.

Segundo Ciclo

1. Llamamos r al radio buscado y x e y como en la figura. Entonces, usando el teorema de Pitágoras podemos formar el sistema



$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 81 \\ x^2 + (y+9)^2 = 256 \end{array}\right. \Rightarrow (y+9)^2 - y^2 = 175$$

$$\Rightarrow 18y + 81 = 175 \Rightarrow 18y = 94 \Rightarrow y = \frac{94}{18} = \frac{47}{9}.$$

Entonces,

$$r = \frac{9-y}{2} = \frac{9 - \frac{47}{9}}{2} = \frac{81-47}{18} = \frac{34}{18} = \frac{17}{9}.$$

2. Llamando x e y, respectivamente, al número de monedas de euro y número de monedas de 20 céntimos, el problema se plantea:

$$\begin{cases} x+0,20y \simeq 15 \\ y+0,20x = \frac{1}{3}(x+0,20y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+0,60x = x+0,20y \Rightarrow 2,80y = 0,40x \\ \Rightarrow x = 7y \Rightarrow 7,20y \simeq 15 \Rightarrow y = 2, x = 14. \end{cases}$$

3. En la primera serie, cada número es la cifra de las unidades de la suma de los dos anteriores. Los siguientes números son: $1, 9, 0, 9, \ldots$ En la segunda serie tenemos los números primos de dos cifras, pero escritos con las cifras invertidas. Los siguientes números son $13, 73, 14, 34, \ldots$.

4. El ciego sabía que su sombrero tenía que ser blanco. A continuación se consideran las posibilidades de que fuera negro y la razón por la que no pueden darse:

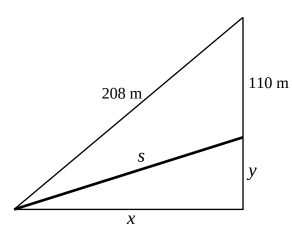
BNN: El primero no hubiera dudado de que su sombrero es blanco, ya que ve dos negros.

NBN: De forma parecida, segundo no hubiera dudado de que su sombrero es blanco, ya que ve dos negros.

BBN: El segundo, al ver un sombrero negro sobre el ciego hubiera sabido que el suyo es blanco, porque en otro caso, el primero habría visto dos sombreros negros y no hubiera dudado sobre el suyo.

5. La hipotenusa del triángulo rectángulo formado por el árbol y su sombra es $\sqrt{10^2+10{,}8^2} = 14{,}7187$ m.

Llamamos s a la longitud de la sombra pedida y x e y como en la figura.



Usando triángulos semejantes, $\frac{208}{110+y} = \frac{14{,}7187}{10}$, de donde $y = 31{,}3168$. Entonces, como $s^2 = x^2+y^2$ y $208^2 = x^2+(y+110)^2$, resulta que $s^2 = 208^2-(y+110)^2+y^2 = 24274{,}3$ y $s = 155{,}802$ m.

6. Si x, y, z son los tres números buscados, entonces $x+y = 38, y+z = 44, z+x = 52$. Sumando las tres ecuaciones, $2x+2y+2z = 38+44+52 = 134 \Rightarrow x+y+z = 67 \Rightarrow x = 67-44 = 23, y = 67-52 = 15, z = 67-38 = 29$.